

فصل سوم : حد بی نهایت و حد در بی نهایت

جملات درست را با (ص) و جملات نادرست را با (غ) مشخص کنید

- ۱- بازه (۰ و ۱) یک همسایگی راست ۱ است. (.....)
- ۲- بازه (۱ و ۲) یک همسایگی چپ ۱- است. (.....)
- ۳- مجموعه $\{۱۰\}$ - (۰ و ۱) یک همسایگی ۱۰ است. (.....)
- ۴- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ برابر ∞ است. (.....)
- ۵- حد تابع $\left[\frac{1}{x}\right]$ وقتی x به سمت $-\infty$ میل می کند برابر ۱- است.

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید

- ۱- حد تابع $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2+1}$ برابر با است.
- ۲- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sin x}$ برابر است.

به سوالات زیر پاسخ کامل دهید

- ۱- حاصل تدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + 1} =$

پ) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} =$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^2 - 7x - 8} =$

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x-5} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 5}{2 - x} =$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 9}{2 - x} =$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x| - 1}{|x - 2|} =$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

$$ۛ) \lim_{x \rightarrow ۛ} \frac{x - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^ۛ - ۛx + ۛ}} =$$

$$ۛ) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{ۛ}} \frac{[x] - ۛ}{ۛx^ۛ - ۛx + 1} =$$

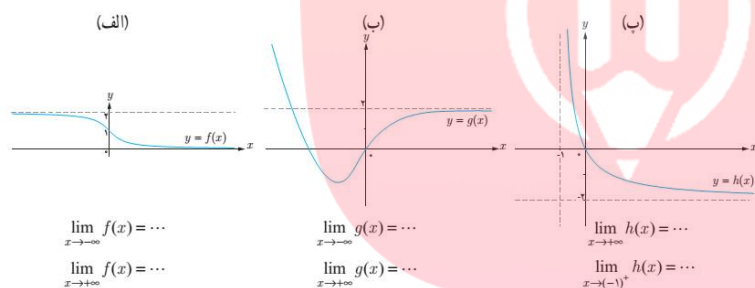
$$ۛ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^ۛ + x - ۛ}{x^ۛ - ۛx^ۛ + ۛx - 1} =$$

$$ۛ) \lim_{x \rightarrow ۛ^-} \frac{[x] - ۛ}{x - ۛ} =$$

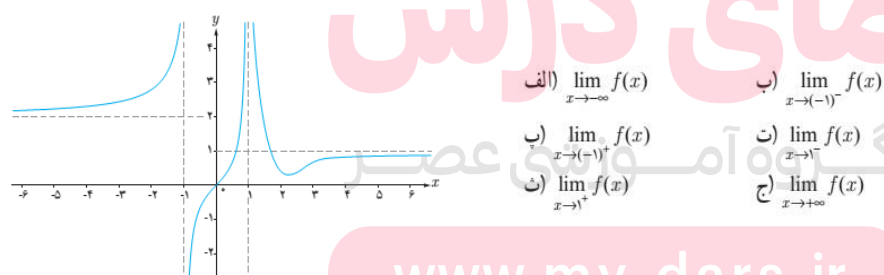
$$ۛ) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{ۛ}^+} \frac{1}{\cos x} =$$

$$ۛ) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{ۛ}^+} \tan x =$$

ۛ- با توجه به نمودار توابع ، حدود خواسته شده را بنویسید.



ۛ- (الف) با توجه به نمودار ، حدود خواسته شده را بنویسید.



www.my-dars.ir

ب) مبنای های قائم و افقی را در شکل فوق بنویسید.

۵- حدود زیر را مناسبه کنید

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(a + \frac{y}{x^p} \right) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p + \frac{1}{x^p}}{\frac{q}{x} - \delta} =$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{px^p - qx + 1}{x^p + \delta x - p} =$

ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-qx^p + rx - a}{px^p - qx^p + x} =$

ث) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{px^\delta - qx^p - x}{x^p - \delta x + 1} =$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{p}x^p + rx^p - q \right) =$

۶- اگر $p = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^{n+px^p+1}}{px^q - x^p + \delta}$ باشد، حاصل $a + n$ را پیدا کنید.

۷- مجانب های قائم و افقی هریک از توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $y = \frac{px - \delta}{x - q}$

ب) $y = \frac{\delta x}{x^p - a}$

پ) $y = \frac{\delta + px^p}{q - x^p}$

ت) $y = px^p$

۸- معادلات خطوط مجانب قائم و افقی تابع $y = \frac{px - \delta}{|px| - p}$ را در صورت وجود تعیین کنید.

www.my-dars.ir

۹- کدامیک از خطوط $x = -p$ و $x = 1$ مجانب های قائم $f(x) = \frac{x^p - qx + p}{x^p + x - p}$ می باشند؟

۱۰- اگر $x = -۲$ و $x = ۱$ میانب های قائم $y = \frac{x+۱}{-x^۲+ax+b}$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

۱۱- اگر $y = \frac{x^۲+mx-۲}{x^۲+n}$ تنها دارای میانب قائم $x = ۲$ باشد، مقادیر m و n را بیابید.

۱۲- وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{۳x}{x^۲-۴x+۴}$ را در همسایگی $x = ۲$ رسم کنید.

۱۳- اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{۲}$ و $f(x) = \frac{ax^۲-۳x+۲}{۲x^۲+x-۳}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow ۱} f(x)$ را پیدا کنید.

۱۴- نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید و سپس حدود فواسته شده را بدست آورید.

الف) $f(x) = x^۲ - ۱$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$, $\lim_{x \rightarrow ۰} f(x) = \dots$

ب) $g(x) = \begin{cases} ۲x + ۱, & x > ۰ \\ ۳, & x < ۰ \end{cases}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

پاسخنامه فصل سوم : حد بی نهایت و حد در بی نهایت

جملات درست را با (ص) و جملات نادرست را با (غ) مشخص کنید

۱- (ص)

۲- (غ)

۳- (ص)

۴- (ص)

۵- (ص)

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید

۱- صفر

۲- یک

به سوالات زیر پاسخ کامل دهید

۱- حاصل تدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 + 2x^2 + 4}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{(x+2)(2x^2 - x + 2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 2)} = \frac{12}{12} = 1$

پ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - (x-1)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{2 + \sqrt{x-1}} = -\frac{1}{4}$$

ت) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^2 - 7x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^2 - 7x - 8} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{(x-8)(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \frac{1}{9 \times (4 + 4 + 4)} = \frac{1}{108}$$

۲- حاصل تدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x-5} = \frac{2 \times 5}{5^+ - 5} = \frac{+10}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 5}{2 - x} = \frac{2^2 + 2 - 5}{2 - 2^+} = \frac{+1}{0^-} = -\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 9}{2 - x} = \frac{2(2)^2 - 9}{2 - 2^-} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x| - 1}{|x - 2|} = \frac{|2| - 1}{|2 - 2|} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$

$$\text{ث)} \lim_{x \rightarrow \nu} \frac{x - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^\nu - \nu x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \nu} \frac{x - \sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-\nu)^\nu}} = \lim_{x \rightarrow \nu} \frac{x - \sqrt{x-1}}{|x-\nu|} = \frac{\nu - \sqrt{\nu-1}}{|\nu-\nu|} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{ج)} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\nu}} \frac{[x] - \nu}{\nu x^\nu - \nu x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\nu}} \frac{[x] - \nu}{(\nu x - 1)^\nu} = \frac{\left[\frac{1}{\nu}\right] - \nu}{\left(\nu \times \frac{1}{\nu} - 1\right)^\nu} = \frac{-\nu}{0^+} = -\infty$$

$$\text{د)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\nu + x - \nu}{x^\nu - \nu x^\nu + \nu x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+\nu)(x-1)}{(x-1)(x^\nu - \nu x + 1)} = \frac{+\nu}{0^+} = +\infty$$

$$\text{ه)} \lim_{x \rightarrow \nu^-} \frac{[x] - \nu}{x - \nu} = \frac{[\nu^-] - \nu}{\nu^- - \nu} = \frac{\nu - \nu}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\text{و)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\nu}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi^+}{\nu}\right)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\text{ز)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\nu}^+} \tan x = \tan\left(\frac{\pi^+}{\nu}\right) = -\infty$$

۱۲- با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

$$\text{الف)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \nu, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{ب)} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \nu$$

$$\text{الف)} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\nu, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} h(x) = +\infty$$

۱۳- با توجه به نمودار، حدود خواسته شده را بنویسید.

$$\text{الف)} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \nu \quad \text{و} \quad \text{ب)} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$$

$$\text{پ)} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty \quad \text{ت)} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\text{ث)} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{ج)} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\text{میانج قائم: } x = 1, x = -1 \quad \text{میانج افقی: } y = 1, y = \nu$$

۱۴- حدود زیر را مناسبه کنید.

$$\text{الف)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(a + \frac{\gamma}{x^\nu}\right) = a + \frac{\gamma}{(-\infty)^\nu} = a + 0 = a$$

$$\text{ب)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\nu + \frac{1}{x^\nu}}{\frac{\nu}{x} - \omega} = \frac{\nu + \frac{1}{+\infty}}{\frac{\nu}{+\infty} - \omega} = \frac{\nu + 0}{0 - \omega} = \frac{\nu}{-\omega}$$

www.my-dars.ir

$$\begin{aligned} \text{پ)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\nu x^\nu - \mu x + 1}{x^\nu + \delta x - \mu} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^\nu (\nu - \frac{\mu}{x} + \frac{1}{x^\nu})}{x^\nu (1 + \frac{\delta}{x} - \frac{\mu}{x^\nu})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^\nu} (\nu - \frac{\mu}{-\infty} + \frac{1}{+\infty})}{\cancel{x^\nu} (1 + \frac{\delta}{-\infty} - \frac{\mu}{+\infty})} = \frac{\nu - 0 + 0}{1 - 0 + 0} \\ &= \frac{\nu}{1} = \nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ت)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\zeta x^\mu + \gamma x - \alpha}{\nu x^\mu - \mu x^\nu + x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^\mu (-\zeta + \frac{\gamma}{x^\nu} - \frac{\alpha}{x^\mu})}{x^\mu (\nu - \frac{\mu}{x} + \frac{1}{x^\nu})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^\mu} (-\zeta + \frac{\gamma}{+\infty} - \frac{\alpha}{-\infty})}{\cancel{x^\mu} (\nu - \frac{\mu}{-\infty} + \frac{1}{+\infty})} \\ &= \frac{-\zeta + 0 - 0}{\nu - 0 + 0} = \frac{-\zeta}{\nu} = -\mu \end{aligned}$$

$$\text{ث)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^\delta - \zeta x^\mu - x}{x^\nu - \delta x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^\mu} (\mu - \frac{\zeta}{x^\nu} - \frac{1}{x^\mu})}{\cancel{x^\mu} (1 - \frac{\delta}{x} + \frac{1}{x^\nu})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu (\mu - \frac{\zeta}{x^\nu} - \frac{1}{x^\mu})}{(1 - \frac{\delta}{x} + \frac{1}{x^\nu})} = +\infty$$

$$\text{ج)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{\nu} x^\mu + \gamma x^\nu - \zeta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\mu (-\frac{1}{\nu} + \frac{\gamma}{x} - \frac{\zeta}{x^\mu}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\nu} x^\mu = -\infty$$

۶- اگر $\mu = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + \nu x^\mu + 1}{\mu x^\mu - x^\nu + \delta}$ باشد حاصل $a + n$ را پیدا کنید.

نکته ۱: چون حاصل عدد می باشد پس درجه صورت و مخرج یکسان است: $n = \mu$

نکته ۲: حاصل تقسیم ضریب بالاترین درجه صورت و ضریب بالاترین درجه مخرج که هم درجه هستند برابر μ می باشد.

$$\frac{a}{\mu} = \mu \rightarrow a = \mu^2 : a + n = \mu^2 + \mu = \mu^2$$

۷- معادله های قائم و افقی هریک از توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$\text{الف)} \quad y = \frac{\mu x - \delta}{x - \mu}$$

$$\text{ب)} \quad y = \frac{\delta x}{x^\mu - \alpha}$$

$$\text{میانب قائم: } x - \mu = 0 \rightarrow x = \mu$$

$$\text{میانب قائم: } x^\mu - \alpha = 0 \rightarrow x = \mu, x = -\mu$$

$$\text{میانب افقی: } y = \mu$$

$$\text{میانب افقی: } y = 0$$

$$\text{پ)} \quad y = \frac{\delta + \mu x^\nu}{\mu - x^\mu}$$

$$\text{ت)} \quad y = \mu x^\mu$$

$$\text{میانب قائم: } \mu - x^\mu = 0 \rightarrow x = \mu, x = -\mu$$

ندارد: میانب قائم

$$\text{میانب افقی: } y = -\mu$$

ندارد: میانب افقی

۸- معادلات خطوط مجانب قائم و افقی تابع $y = \frac{bx-5}{|bx|-3}$ را در صورت وجود تعیین کنید.

$$x \geq 0 \rightarrow bx \geq 0 \rightarrow y = \frac{bx-5}{bx-3} \rightarrow \text{مجانِب قائم: } x = \frac{3}{b} \text{ و } \text{مجانِب افقی: } y = 1$$

$$x < 0 \rightarrow bx < 0 \rightarrow y = \frac{bx-5}{-bx-3} \rightarrow \text{مجانِب قائم: } x = -\frac{3}{b} \text{ و } \text{مجانِب افقی: } y = -1$$

۹- کدامیک از خطوط $x = 1$ و $x = -1$ و $x = 1$ و $x = -1$ مجانب های قائم $f(x) = \frac{x^3-14x+13}{x^3+x-1}$ می باشند؟

$$f(x) = \frac{x^3-14x+13}{x^3+x-1} = \frac{(x-1)(x^2+13)}{(x+1)(x-1)} \rightarrow \text{مجانِب قائم است } x = -1$$

۱۰- اگر $x = 1$ و $x = -1$ مجانب های قائم $y = \frac{x+1}{-x^2+ax+b}$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

$$-x^2+ax+b=0$$

$$x = -1: -1 - a + b = 0 \rightarrow -a + b = 1$$

$$x = 1: -1 + a + b = 0 \rightarrow a + b = 1 \rightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} : a = -1, b = 1$$

۱۱- اگر $y = \frac{x^3+mx-1}{x^3+n}$ تنها دارای مجانب قائم $x = 1$ باشد، مقادیر m و n را بیابید.

$$x = 1 \rightarrow x^3 + n = 0 \rightarrow 1 + n = 0 \rightarrow n = -1$$

$$y = \frac{x^3+mx-1}{x^3+n} = \frac{x^3+mx-1}{x^3-1} = \frac{x^3+mx-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$x = -1: (-1)^3 - 1m - 1 = 0 \rightarrow m = 1$$

۱۲- وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{10x}{x^3-14x+13}$ را در همسایگی $x = 1$ رسم کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x}{x^3-14x+13} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x}{(x-1)^2} = \frac{+c}{0^+} = +\infty$$



$x = 1$

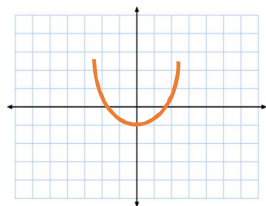
۱۳- اگر $f(x) = \frac{ax^3-13x+13}{13x^3+x-13}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{13}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را پیدا کنید.

$$\frac{a}{13} = \frac{1}{13} \rightarrow a = 1$$

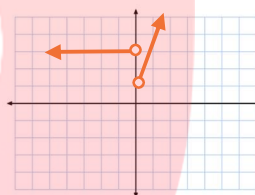
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{13x^3-13x+13}{13x^3+x-13} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+13)}{(x-1)(13x+13)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(13x+13)} = \frac{-1}{26}$$

۱۴- نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بدست آورید.

الف) $f(x) = x^2 - 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$



ب) $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$



مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir